BAREM DE CORECTARE și NOTARE

I. Fie numărul $a = 16^{506} - 4^{1009} - 2^{2024^0} \cdot 8^{672}$.

a) Arătați că a este multiplu de 125.

b) Determinați ultimele 4 cifre ale numărului a.

c) Scrieți numărul a ca o sumă de două pătrate perfecte.

Soluție:

a) $a = 2^{2024} - 2^{2018} - 2 \cdot 2^{2016} = 2^{2024} - 2^{2018} - 2^{2017}$ ……………………………......1p

$a = 2^{2017} \cdot (2^7 - 2^1 - 2^0) = 2^{2017} \cdot 125 \Rightarrow a \vdots 125$ ……………………………………..1p

$b)$ $a = 2^{2014} \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^{2014} \cdot 1000$ ……………………………………………………1p

Ultima cifră a numărului 2^{2014} este 4, deci ultimele patru cifre ale numărului a sunt: 4,0,0,0…2p

b) $a = (2^{1007})^2 \cdot 1000 = (2^{1007})^2 \cdot (10^2 + 30^2)$ ……………………………………… 1p

$a = (2^{1007} \cdot 10)^2 + (2^{1007} \cdot 30)^2$ ……………………………………………... 1p

II. a) Suma cifrelor numărului $\overline{abc}$ este 26.

Calculați suma cifrelor numărului $n = \overline{abc} + 1$. Analizați toate situațiile posibile.

b) Determinați numerele $\overline{xyz}$ știind că $\overline{xyz} = 10 \cdot (x + y + z)^2$.

Soluție:

a) Dacă $a + b + c = 26$ și a, b și c sunt cifre atunci două dintre ele sunt 9 iar una 8....1p

Sunt trei posibilități:

Dacă $\overline{abc} = 998$ atunci $\overline{abc} + 1 = 999$ are suma cifrelor 27.

Dacă $\overline{abc} = 989$ atunci $\overline{abc} + 1 = 990$ are suma cifrelor 18.

Dacă $\overline{abc} = 899$ atunci $\overline{abc} + 1 = 900$ are suma cifrelor 9

Deci, suma cifrelor poate fi: 27, 18 sau 9. ....2p

b) Deduce că 10 divide $\overline{xyz}$, deci *z=0* 1p

Egalitatea devine $\overline{xy} = (x + y)^2$ 1p

Deduce că x=8 și *y=1* 1p

Finalizare, numărul $\overline{xyz}$ este 810. ....1p

III. Determinați suma numerelor naturale cuprinse între 1504 și 2007, care prin împărțire la 28 dau restul 5, iar prin împărțire la 35 dau restul 12.

Gazeta Matematică nr.6-7-8/2023

Soluție: Fie *n* număr natural care satisface condițiile problemei.

$n = 28c_1 + 5 \Rightarrow 5n = 140c_1 + 25$ 1p

$n = 35c_2 + 12 \Rightarrow 4n = 140c_2 + 48$ 1p

$5n - 4n = 140c_1 - 140c_2 + 25 - 48$

$\boldsymbol{n} = 140 \cdot (c_1 - c_2 - 1) + 140 + 25 - 48$

$\boldsymbol{n} = 140 \cdot (c_1 - c_2 - 1) + 117$ (1) ...2p

Cum $1504 < n < 2007$, deduce că $1387 < 140 \cdot (c_1 - c_2 - 1) < 1890$ (2) 1p

Multiplii lui 140 cuprinși între 1387 și 1890 sunt: 1400, 1540, 1680 și 1820 (3) 1p

Din relațiile (1), (2), (3) deduce valorile posibile ale lui *n*, respectiv numerele: 1517, 1657, 1797, și 1937, a căror sumă este 6908. ....1p

IV.

a) Numerele 35, 48, 61, 73, 98, 82, 69, 19, 56 și 44 sunt grupate în perechi astfel încât suma numerelor fiecărei perechi este aceeași. Care este numărul pereche cu 48?

b) Mihai are într-o cutie 26 bile roșii și 29 bile verzi. El se joacă scoțând de fiecare dată două bile din cutie. Dacă acestea au aceeași culoare, pune înapoi în cutie o bilă roșie, dacă au culori diferite pune înapoi în cutie o bilă verde. Repetă mișcarea până ce în cutie mai rămâne o singură bilă. Ce culoare va avea această bilă? Justificați răspunsul.

Soluție:

a) Suma numerelor date este 585, ...1p
   iar suma numerelor dintr-o pereche este $585 : 5 = 117$ 1p
   Numărul în pereche cu 48 este $117 - 48 = 69$. 1p
b) Extrăgând două bile roșii, pune înapoi o bilă roșie, deci numărul bilelor roșii ar scădea cu una, al bilelor verzi nu s-ar modifica. 1p
   Extrăgând două bile verzi, pune înapoi o bilă roșie, deci numărul bilelor verzi ar scădea cu două, al bilelor roșii ar crește cu una...1p
   Extrăgând două bile de culori diferite, pune înapoi o bilă verde, deci bilelor verzi nu s-ar modifica iar numărul bilelor roșii ar scădea cu una, ...1p
   Dacă prin repetare numărul bilelor roșii își schimbă paritatea, numărul bilelor verzi va avea mereu aceeași paritate; la final trebuie să rămânem cu o bilă și cum numărul de bile verzi este mereu impar, bila rămasă trebuie să fie verde...1p

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
16.02.2024
Clasa a VI-a

SOLUȚII ȘI BAREM DE CORECTARE

1. *Pe parcursul anului 2022, la un magazin de jucării s-au vândut 235 de roboți. În fiecare lună, numărul roboților vânduți a fost 16, 20 sau 25. Determinați numărul de luni în care s-au vândut exact 20 de roboți.*
(G.M. nr. 6-7-8/2023)

Notăm cu a numărul de luni în care s-au vândut 16 roboți, cu b numărul de luni în care s-au vândut 20 roboți și cu c numărul de luni în care s-au vândut 25 roboți. Astfel obținem $a+b+c = 12$ și $16a+20b+25c = 235$ .... **(1p)**
Deoarece $20b$, $25c$ și 235 sunt multipli lui 5 deducem că $16a$ este multiplu al lui 5.. **(1p)**
Cum 16 și 5 sunt prime între ele deducem că a este multiplu al lui 5, iar $a+b+c=12 \Rightarrow a \in \{0; 5; 10\}$.............. **(1p)**
Cazurile $a = 0$ și $a = 10$ nu convin, deci $a = 5$ .... **(1p)**
În acest caz opținem $b+c = 7$ și $20b+25c = 235 - 80 \Leftrightarrow 4b+5c = 31$... **(1p)**
Deci $31 - 4b$ este multiplu de 5, situație care convine doar pentru $b = 4$ și $c = 3$ .... **(1p)**
În concluzie, în 4 luni ale anului s-au vândut exact 20 roboți.. **(1p)**

2. *Considerăm unghiurile* ∢XOY *și* ∢YOZ, *adiacente și suplementare. Pe semidreapta* (OY *fixăm un punct* P. *Paralela prin* P *la bisectoarea lui* ∢XOY *intersectează semidreapta* (OZ *în punctul* M.
a) Arătați că ∢OPM≡∢OMP.
b) *Arătați că bisectoarea lui* ∢YOZ *este perpendiculară pe dreapta* PM.

Figura conform enunțului.. **(1p)**
a) Notăm cu (OA bisectoarea unghiului ∢XOY⇒∢AOX≡∢AOP (1) .... **(1p)**
Din OA∥PM și OP secantă⇒∢AOP≡∢OPM (alt. int.) (2) .... **(1p)**
Din OA∥PM și XM secantă⇒∢AOX≡∢PMO (coresp.) (3) .... **(1p)**
Din (1), (2) și (3) prin tranzitivitate se deduce că ∢OPM≡∢OMP.. **(1p)**
b) Notăm cu C intersecția dintre PM și bisectoarea lui ∢YOZ
Folosind definiția bisectoarei unui unghi deducem că m(∢AOC) = 90^o, sumă dintre jumătățile unghiurilor suplementare ∢XOY și ∢YOZ .... **(1p)**
Din OA∥PM și OC secantă⇒∢AOC=∢OCM =90^o (alt. int.) ⇒ OC ⊥ PM.................................. **(1p)**

3. *Doi prieteni au plecat în excursie cu o companie aeriană având împreună 60 kg de bagaje. Prețul biletului eliberat de această companie aeriană dă dreptul la transportarea gratuită a unui număr maxim fixat de kilograme, pasagerii urmând să plătească o taxă suplimentară pentru fiecare kilogram pe care bagajul lor îl are în plus. Pentru depășirea cantităților admise cele două persoane au plătit suplimentar 40 de lei, respectiv 72 de lei, sumele acestea fiind direct proporționale cu numărul kilogramelor de bagaj în plus. Dacă o persoană ar fi călătorit singură, luând cele 60 kg de bagaj, atunci ar fi plătit 296 de lei pentru cantitatea de bagaj în plus. Care este numărul maxim de kilograme pe care le poate transporta o persoană fără să plătească taxe suplimentare la acea companie aeriană?*
Notăm cu x numărul maxim de kg acceptate de compania aeriană, fără a plăti taxe suplimentare, cu a şi b numărul kilogramelor de bagaj al fiecăruia din cei doi prieteni.

Se poate exprima numărul kilogramelor de bagaj pentru care se plătesc taxe astfel: $a - x$ şi $b - x$ pentru fiecare persoană, iar în cazul când ar circula doar o singură persoană, $60 - x$ .... **(1p)**

Relaţiile care se pot scrie între aceste numere, folosind ipotezele problemei sunt:

$a+b = 60$; $(a - x)\cdot p=40$; $(b - x)\cdot p=72$; $(60 - x)\cdot p=296$ sau $\frac{40}{a-x} = \frac{72}{b-x} = \frac{296}{60-x} = p,$

unde p reprezintă taxa pentru fiecare kg de bagaj în plus, mărime constantă.. **(1p)**

Dacă se adună numărătorii şi numitorii primelor două rapoarte sau a celor trei rapoarte egale din şir, se obţine un raport egal cu cele din şir .... **(1p)**

Scrierea uneia din ecuaţii, cu necunoscuta x, de exemplu, $\frac{60-2x}{112} = \frac{60-x}{296}$ .... **(2p)**

Rezolvarea ecuaţiei şi finalizarea $x = 23$, răspuns 23 kg .... **(2p)**

4. *Pe un cerc C(O; R) considerăm în ordinea rotirii acelor de ceasornic punctele $A_1; A_2; A_3;\ldots; A_{2n}$ astfel încât A_i și A_{n+i} să fie diametral opuse pentru orice $i\in\{1; 2; \ldots ; n\}$.*

a) Pentru n=5 arătați că punctele date determină pe cerc cel puțin două arce cu măsura mai mică sau egală cu 36^o.

b) *Dacă M și P sunt respectiv mijloacele arcelor $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ și $\overset{\frown}{A_{n+i}A_{n+i+1}}$ demonstrați că M și P sunt puncte diametral opuse pentru orice $i\in\{1; 2; \ldots ; n-1\}$.*

a) Dacă $n=5$ avem punctele $A_1; A_2; A_3;\ldots; A_{10}$ și diametrele (A_1A_6); (A_2A_7); (A_3A_8); (A_4A_9); (A_5A_{10}).
Pe cercul dat putem considera tot în ordinea rotirii acelor de ceasornic punctele $P_1; P_2; P_3;\ldots; P_{10}$ astfel încât P_1 coincide cu A_1 și $\overset{\frown}{P_1P_2} = \overset{\frown}{P_2P_3} = \ldots = \overset{\frown}{P_9P_{10}} = \overset{\frown}{P_{10}P_1} = 36^o$ .... **(1p)**

Prin aplicarea principiului cutiei există cel puțin un arc închis $\overset{\frown}{P_xP_{x+1}}$ de 36^o care conține două puncte consecutive dintre $A_1; A_2;\ldots; A_{10}$ .... **(1p)**

Am demonstrat că există un arc cu măsura mai mică cel mult egală cu 36^o și în acest caz avem unghiul la centru corespunzător are aceeași măsură, iar prin aplicarea proprietății unghiurilor opuse la vârf obținem și un arc opus de aceeași măsură. .... **(1p)**

<u>*Soluție alternativă*</u>: prin reducere la absurd putem presupune că toate arcele disjuncte $\overset{\frown}{A_1A_2}; \overset{\frown}{A_2A_3}; \ldots \overset{\frown}{A_9A_{10}}; \overset{\frown}{A_{10}A_1}$ determinate de punctele date au măsurile mai mari decât 36^o, iar prin însumare obținem mai mult decât 360^o ceea ce intră în contradicție cu suma tuturor măsurilor arcelor disjuncte ale unui cerc. Deci presupunerea făcută este falsă. Astfel obținem cel puțin un arc cu măsura mai mică sau egală cu 36^o.
De aici prin raționament similar celui din prima soluție se obține o măsură egală și pentru arcul opus.

b) Deoarece arcele $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ și $\overset{\frown}{A_{n+i}A_{n+i+1}}$ sunt delimitate de diametrele (A_iA_{n+i}) și $(A_{i+1}A_{n+i+1})$ deducem prin aplicarea proprietății unghiurilor opuse la vârf că acestea au aceeași măsură .... **(1p)**

Mjloacele arcelor date determină astfel egalitatea $\overset{\frown}{A_iM} = \overset{\frown}{MA_{i+1}} = \overset{\frown}{A_{n+i}P} = \overset{\frown}{PA_{n+i+1}}$ .... **(1p)**

De aici obținem congruența corespunzătoare a unghiurilor la centru $\widehat{A_iOM} \equiv \widehat{A_{n+i}OP}$ .... **(1p)**

Avem (A_iA_{n+i}) diametru și $\widehat{A_iOM} \equiv \widehat{A_{n+i}OP}$, iar prin aplicarea reciprocei teoremei unghiurilor opuse la vârf obținem că M, O , P sunt coliniare, adică M și P diametral opuse .... **(1p)**

Olimpiada Naţională de Matematică

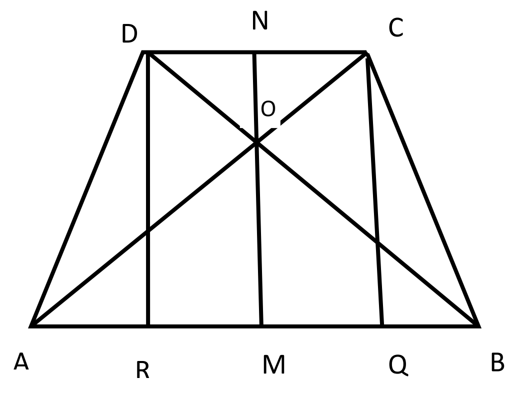
Etapa Locală, județul Timiș

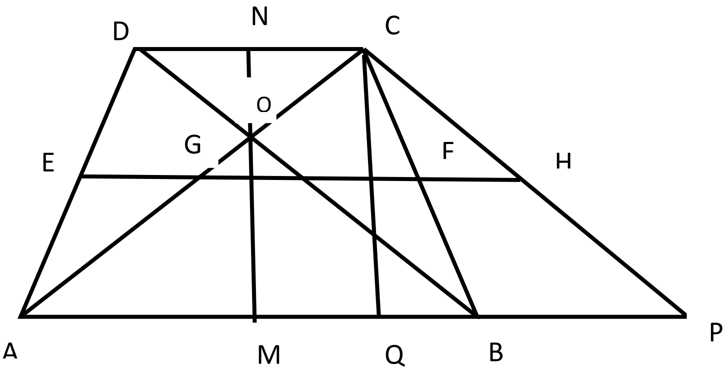
16.02.2024

Clasa a VII-a

SOLUȚII ȘI BAREM

1.	***a)*** *Fie* $A = 2023^{2023} + 2024^{2024} + 2025^{2025}$. *Arătați că* $\sqrt{A}$ *este număr irațional.* ***b)*** *Demonstrați că* $\sqrt{a+b+c}$ *este număr irațional, dacă* $\left(\overline{ab2}, \overline{bc7}, \overline{ca8}\right) = 3$, *unde prin* (x, y, z) *înțelegem c.m.m.d.c al numerelor* x, y, z.	
	a) $u(2023^{2023}) = u(3^{2023}) = u(3^3) = 7; u(2024^{2024}) = u(4^{2024}) = 6;$ $u(2025^{2025}) = u(5^{2025}) = 5$	**1p**
	$u(A) = u(7+6+5) = u(18) = 8$	**1p**
	A nu este pătrat perfect⇒$\sqrt{A}$ este număr irațional.	**1p**
	b) Dacă $\left(\overline{ab2}, \overline{bc7}, \overline{ca8}\right) = 3$⇒$\overline{ab2} \vdots 3$⇒$a + b + 2 = M_3$ (1); $\overline{bc7} \vdots 3$⇒$b + c + 7 = M_3$ (2) $\overline{ca8} \vdots 3$⇒$c + a + 8 = M_3$ (3)	**1p**
	Prin adunarea relațiilor (1),(2) și (3), obținem că $2a + 2b + 2c + 17 = M_3$	**1p**
	$2a + 2b + 2c + 2 = M_3$⇒$2(a + b + c + 1) = M_3$⇒$a + b + c + 1 = M_3$	**1p**
	$a + b + c = M_3 + 2$ care nu este pătrat perfect⇒$\sqrt{a+b+c}$ este irațional.	**1p**
2.	***a)*** *Arătați că nu există numerele raționale a și b astfel încât:* $$\sqrt{3(a-1)^2} + \sqrt{75} = \sqrt{(b+2)^2} - \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}.$$ ***b)*** *Determinați numerele naturale a și b astfel încât:* $\sqrt{20a^2 + 24b^2 + 1} = 20 + 24 + 1.$	
	a) $\sqrt{3}\lvert a-1\rvert + 5\sqrt{3} = \lvert b+2\rvert - \lvert 1-\sqrt{3}\rvert$⇒$\sqrt{3}\lvert a-1\rvert + 5\sqrt{3} = \lvert b+2\rvert - \sqrt{3} + 1$	**1p**
	$\sqrt{3}(\lvert a-1\rvert + 6) = \lvert b+2\rvert + 1$	**1p**
	Cum $a, b \in Q$, rezultă că singura posibilitate ar fi ca $\lvert a-1\rvert + 6 = 0$ și $\lvert b+2\rvert + 1 = 0$, imposibil.	**1p**
	b) $\sqrt{20a^2 + 24b^2 + 1} = 45$⇒$20a^2 + 24b^2 + 1 = 45^2 = 2025$⇒ $20a^2 + 24b^2 = 2024$	**1p**
	$5a^2 + 6b^2 = 506$⇒$5a^2$ e par⇒a^2 e par⇒a e par, dar $5a^2 < 506 \Rightarrow a^2 \leq 100$, ca urmare $a \in \{0,2,4,6,8,10\}$	**1p**
	Dacă $a = 0 \Rightarrow 6b^2 = 506 \Rightarrow b^2 = \frac{506}{6}$, nu e soluție; Dacă $a = 2$⇒$5 \cdot 2^2 + 6 \cdot b^2 = 506 \Rightarrow 6b^2 = 486 \Rightarrow b^2 = 81 \Rightarrow b = 9$, e soluție; Dacă $a = 4$⇒$5 \cdot 4^2 + 6 \cdot b^2 = 506 \Rightarrow 6b^2 = 426 \Rightarrow b^2 = 71$, nu e soluție; Dacă $a = 6$⇒$5 \cdot 6^2 + 6 \cdot b^2 = 506 \Rightarrow 6b^2 = 326$⇒$b^2 = \frac{326}{6}$, nu e soluție; Dacă $a = 8$⇒$5 \cdot 8^2 + 6 \cdot b^2 = 506 \Rightarrow 6b^2 = 186 \Rightarrow b^2 = 31$, nu e soluție; Dacă $a = 10$⇒$5 \cdot 10^2 + 6 \cdot b^2 = 506 \Rightarrow 6b^2 = 6 \Rightarrow b^2 = 1$⇒$b = 1$ e soluție. Deci soluțiile sunt: $a = 2, b = 9$ și $a = 10, b = 1$.	**2p**

3.	*Fie E un punct pe latura DC a pătratului $ABCD$, AN bisectoarea unghiului $\sphericalangle EAB$, $N \in BC$ și P punctul de intersecție a dreptelor AE și BC. Perpendiculara din P pe NE intersectează dreapta DC în M. Demonstrați că:* ***a)*** *NA este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MNB$;* ***b)*** *$MN = DM + BN$;* ***c)*** *$\sphericalangle MAN = 45^0$.* **G.M**	
	a) Notăm $NE \cap MP = \{F\}$, $MN \cap AP = \{G\}$. În triunghiul PMN avem $MC \perp PN$, $NF \perp MP$, $MC \cap NF = \{E\}$, deci E este ortocentrul triunghiului PMN, prin urmare $PG \perp MN$.	**1p**
	Atunci $\sphericalangle ANM = 90^0 - \sphericalangle GAN$(1), $\sphericalangle ANB = 90^0 - \sphericalangle BAN$ (2)	**1p**
	Din (1), (2) și $\sphericalangle GAN = \sphericalangle BAN$, rezultă că NA este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MNB$	**1p**
	b) $\Delta ANG \equiv \Delta ANB$(I.U)$\Rightarrow BN = GN$ (3) și $AG = AB \Rightarrow AG = AD$ și $\Delta ADM \equiv \Delta AGM$(I.C)$\Rightarrow DM = GM$(4)	**1p**
	Adunând relațiile (3) și (4) obținem că $MN = DM + BN$	**1p**
	c) Din $\Delta ADM \equiv \Delta AGM \Rightarrow \sphericalangle DAM = \sphericalangle GAM$	**1p**
	$\sphericalangle GAN = \sphericalangle BAN \Rightarrow \sphericalangle MAN = \sphericalangle DAM + \sphericalangle BAN = 90^0 - \sphericalangle MAN$. Deci $\sphericalangle MAN = 45^0$	**1p**
4.	***a)*** *Să se arate că nu există un triunghi cu lungimile înălțimilor $1, \sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$.* ***b)*** *Se consideră trapezul isoscel ABCD (AB//CD, AB>CD). Știind că înălțimea MN a trapezului este egală cu linia mijlocie EF, arătați că diagonalele trapezului sunt perpendiculare.*	
	a) $A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} \Rightarrow a = \frac{2A}{h_a}, b = \frac{2A}{h_b}, c = \frac{2A}{h_c}$, unde A este aria triunghiului, a, b, c sunt lungimile laturilor și h_a, h_b, h_c sunt lungimile înălțimilor corespunzătoare acestora.	**1p**
	Dacă ar exista triunghiul, atunci din $a < b + c \Rightarrow \frac{2A}{1} < \frac{2A}{\sqrt{3}} + \frac{2A}{1+\sqrt{3}} \Rightarrow 1 < \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{1+\sqrt{3}}$ (1)	**1p**
	Din (1), obținem că $1 < \frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} \Rightarrow \sqrt{3}(\sqrt{3}+1) < 1 + 2\sqrt{3} \Rightarrow 3 + \sqrt{3} < 2\sqrt{3} + 1 \Rightarrow 2 < \sqrt{3}$, fals.	**1p**
	b) Soluția 1  	
	Fie $CQ \perp AB$, $DR \perp AB$, $R, Q \in AB \Rightarrow AQ = AR + RQ = AR + CD = \frac{AB-CD}{2} + CD = \frac{AB+CD}{2}$ Analog, obținem că $BR = \frac{AB+CD}{2}$	**1p**
	Dar $\frac{AB+CD}{2} = EF = MN = CQ = DR \Rightarrow AQ = CQ$ și $BR = DR$	**1p**
	Triunghiurile ΔACQ și ΔBDR sunt dreptunghice isoscele$\Rightarrow \sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA = 45^0$ (1)	**1p**
	Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Din (1), rezultă că ΔAOB este dreptunghic isoscel, ca urmare $AC \perp BD$.	**1p**

	Soluția 2 	
	Fie $CP//BD$, $P \in AB$ și din $ABCD$ trapez cu $AB//CD \Rightarrow BP//CD \Rightarrow BPCD$ paralelogram $\Rightarrow BP = CD$ și $BD = CP$ (1)	**1p**
	Fie $\mathrm{EF} \cap \mathrm{AC} = \{\mathrm{G}\}$; GH e linie mijlocie în $\Delta\mathrm{APC} \Rightarrow \mathrm{GH} = \frac{\mathrm{AP}}{2} = \frac{\mathrm{AB+BP}}{2} = \frac{\mathrm{AB+DC}}{2} = \mathrm{EF}$, dar $EF = MN \Rightarrow GH = MN$ (2)	**1p**
	Fie $\mathrm{CQ} \perp \mathrm{AB}$, $\mathrm{Q} \in \mathrm{AB} \Rightarrow CQ = MN$ și din (2), obținem că $GH = CQ$ (3). Trapezul $ABCD$ e isoscel$\Rightarrow AC = BD$ și din (1)$\Rightarrow CP = AC \Rightarrow \Delta\mathrm{ACP}$ e isoscel și CQ e înălțime, ca urmare si mediană (4). Din (2) și (3), obținem că $CQ = \frac{AP}{2}$ (5)	**1p**
	Din (4) și (5), rezultă că $\Delta\mathrm{ACP}$ e dreptunghic în C, deci $AC \perp PC$ dar $PC//BD \Rightarrow AC \perp BD$.	**1p**

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
16.02.2024

Clasa a VIII-a
Barem de corectare și notare

1.a) Arătați că dacă $x \in [-1,1], y \in [-2,2]$ și $z \in [-3,3]$, atunci:
$x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz - yz \in [0,25]$.

b) Fie $x \in \mathbb{R}, x > 1$. Demonstrați că $x^2 = ([x]^2 + 1)(\{x\}^2 + 1) \Leftrightarrow x = [x] + \frac{1}{[x]}$.

Soluție:

a) $x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz - yz = \frac{1}{2}[(x+y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2]$................................1p
$-3 \le x + y \le 3,\ -5 \le y - z \le 5,\ -4 \le x - z \le 4$, de unde rezultă:
$0 \le (x+y)^2 \le 9,\ 0 \le (y-z)^2 \le 25,\ 0 \le (x-z)^2 \le 16$..2p
$0 \le \frac{1}{2}[(x+y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2] \le 25$...1p

b) Scriind $x = [x] + \{x\}$ obținem:
$x^2 = ([x]^2 + 1)(\{x\}^2 + 1) \Leftrightarrow ([x] + \{x\})^2 = [x]^2 \cdot \{x\}^2 + [x]^2 + \{x\}^2 + 1 \Leftrightarrow$......................1p
$\Leftrightarrow 2[x] \cdot \{x\} = [x]^2 \cdot \{x\}^2 + 1 \Leftrightarrow ([x] \cdot \{x\} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow [x] \cdot \{x\} = 1 \Leftrightarrow$.............................1p
$\Leftrightarrow \{x\} = \frac{1}{[x]} \Leftrightarrow x - [x] = \frac{1}{[x]} \Leftrightarrow x = [x] + \frac{1}{[x]}$...1p

2. a) Arătați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, au loc inegalitățile: $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{(n+2)\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}$.

b) Arătați că : $\frac{1}{3} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2024\sqrt{2022}} < 2$

Soluție:

a) $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{(n+2)\sqrt{n}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \Leftrightarrow$...1p

$\Leftrightarrow (n+1)^3 < (n+2)^2 \cdot n \Leftrightarrow n^3 + 3n^2 + 3n + 1 < n^3 + 4n^2 + 4n \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n^2 + n > 1$, adevărat $\forall n \in \mathbb{N}^*$..1p
$\frac{1}{(n+2)\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+2}} < \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}} < \frac{n+1}{n+2} \Leftrightarrow$..1p
$\Leftrightarrow n(n+2)^2 < (n+1)^2(n+2) \Leftrightarrow n^3 + 4n^2 + 4n < n^3 + 4n^2 + 5n + 2$,
adevărat $\forall n \in \mathbb{N}^*$..1p

$\frac{1}{3\sqrt{1}} < \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{4\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}}$, $\frac{1}{5\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}}$, ..., $\frac{1}{2024\sqrt{2022}} < \frac{1}{\sqrt{2022}} - \frac{1}{\sqrt{2024}}$........................1p

Adunând relațiile obținem:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2024\sqrt{2022}} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{2022}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2024}}\right) \Rightarrow$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2024\sqrt{2022}} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2023}} - \frac{1}{\sqrt{2024}}$..1p

$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2023}} - \frac{1}{\sqrt{2024}} < 1$, deci $\frac{1}{3} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2024\sqrt{2022}} < 2$..1p

3. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$. Pe muchiile BB' și CC' considerăm punctele M și N astfel încât suma $AM + MN + ND'$ să fie minimă. Calculați sinusul unghiului determinat de dreptele MN și AD'. (G.M. Nr.10/2022, enunț modificat)

Soluție:

Suma $AM + MN + ND'$ este minimă atunci când punctele A, M, N, D' sunt coliniare pe desfășurarea în plan a suprafeței laterale a cubului...1p

$BM = NC' = \frac{BB'}{3}$..1p

Fie $BP \parallel MN, P \in CC'$. Atunci $CP = \frac{CC'}{3}$..1p

Din $BC' \parallel AD'$ și $BP \parallel MN$ rezultă $\sphericalangle(AD', MN) = \sphericalangle(BC', BP) = \sphericalangle(PBC')$............................1p

$A_{PBC'} = \frac{BC \cdot PC'}{2}$, $A_{PBC'} = \frac{PB \cdot BC' \cdot \sin\sphericalangle(PBC')}{2} \Rightarrow \sin\sphericalangle(PBC') = \frac{PC' \cdot BC}{PB \cdot BC'}$..1p

Dacă BC = $x \Rightarrow PC' = \frac{2}{3}x$, PB = $\frac{x\sqrt{10}}{3}$, $BC' = x\sqrt{2} \Rightarrow \sin\sphericalangle(PBC') = \frac{\sqrt{5}}{5}$............................. 2p

4. Triunghiurile ACD și BCD sunt situate în plane diferite. Fie G_1 centrul de greutate al triunghiului ACD și G_2 centrul de greutate al triunghiului BCD. Știind că N este mijlocul segmentului $[CD]$, $M \in [AB]$ astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$, iar $MN \cap AG_2 = \{E\}$, demonstrați că $EG_1 \parallel (BCD)$.

Soluție:

G_1 - centrul de greutate al triunghiului ACD$\Longrightarrow \frac{AG_1}{G_1N} = 2$,

G_2 - centrul de greutate al triunghiului BCD$\Longrightarrow \frac{BG_2}{G_2N} = 2$,

În ΔANB, $\frac{AG_1}{G_1N} = \frac{BG_2}{G_2N} \Longrightarrow G_1G_2 \parallel AB$..2p

Fie $MN \cap G_1G_2 = \{P\}$;

În ΔBMN, $G_2P \parallel BM \Longrightarrow \Delta NPG_2 \sim \Delta NMB \Longrightarrow \frac{PG_2}{BM} = \frac{NG_2}{NB} = \frac{1}{3} \Longrightarrow PG_2 = \frac{BM}{3} = \frac{1}{3}(AB - AM) = \frac{1}{3}\left(AB - \frac{2}{5}AB\right) = \frac{1}{5}AB$...2p

$PG_2 \parallel AM \Longrightarrow \Delta EPG_2 \sim \Delta EMA \Longrightarrow \frac{EG_2}{EA} = \frac{PG_2}{AM} \Longrightarrow \frac{EG_2}{EA} = \frac{\frac{1}{5}AB}{\frac{2}{5}AB} = \frac{1}{2}$...................................1p

G_1 –centru de greutate în triunghiul ADC $\Longrightarrow \frac{G_1N}{AG_1} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{EG_2}{EA} = \frac{G_1N}{G_1A} \Longrightarrow EG_1 \parallel NG_2$…………...1p

$NG_2 \subset (BCD)$, $G_1 \notin (BCD) \Longrightarrow EG_1 \parallel (BCD)$………………………………………………….1p

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
16.02.2024

Clasa a IX-a
Barem de corectare și notare

1. Rezolvați în $\boldsymbol{R}$ ecuația: $\left[\frac{1}{1-x}\right]=\frac{1}{1-[x]}$.

Soluţie:

Condiţii de existență: $\begin{cases} 1-x \neq 0 \\ 1-[x] \neq 0 \end{cases}$. Obţine $x \in R-[1,2)$..............................1p

Condiţia de apartenentă la Z a părţii întregi: $\frac{1}{1-[x]} \in Z$. Obţine $[x]=0$ sau $[x]=2$....1p

Cazul 1: $[x]=0$ implică $x \in [0,1)$. Atunci $\left[\frac{1}{1-x}\right]=1$, deci $x \in [0,\frac{1}{2})$..................2p

Cazul 2: $[x]=2$ implică $x \in [2,3)$. Atunci $\left[\frac{1}{1-x}\right]=-1$,

deci $x \in ((-\infty,1) \cup [2,+\infty)) \cap [2,3)$...2p

Obţine soluţia finală $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right) \cup [2,3)$...1p

2.

a) Fie $a, b \in \boldsymbol{R}^*$. Deduceți valoarea minimă a expresiei $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}$.

b) Dacă $a, b>0$, demonstrați că $\left(1+\frac{a}{b}+\frac{b^2}{a^2}\right)^3+\left(1+\frac{b}{a}+\frac{a^2}{b^2}\right)^3 \geq 54$

Soluţie:

a) Demonstrează / justifică că valoarea minimă a expresiei este 2 ....2p.

b) Metoda 1. (utilizând inegalitatea $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ $\forall x,y>0$ și inegalitatea $x+\frac{1}{x} \geq 2$, $\forall x>0$)

Inegalitatea cerută este echivalentă cu $\frac{\left(1+\frac{a}{b}+\frac{b^2}{a^2}\right)^3+\left(1+\frac{b}{a}+\frac{a^2}{b^2}\right)^3}{2} \geq 27$

$$\frac{\left(1+\frac{a}{b}+\frac{b^2}{a^2}\right)^3+\left(1+\frac{b}{a}+\frac{a^2}{b^2}\right)^3}{2} \geq \sqrt{\left(1+\frac{a}{b}+\frac{b^2}{a^2}\right)^3\left(1+\frac{b}{a}+\frac{a^2}{b^2}\right)^3}=\sqrt{\left(1+\frac{a}{b}+\frac{b^2}{a^2}\right)\left(1+\frac{b}{a}+\frac{a^2}{b^2}\right)}^3= \text{.......2p}$$

$$=\sqrt{1+\frac{b}{a}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}+1+\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}+1}^3 \geq \sqrt{3+2+2+2}^3=27 \quad \text{..................................3p}$$

Metoda 2. (utilizând inegalitatea $x^3 + y^3 \geq \frac{(x+y)^3}{4}$ $\forall x, y > 0$ și inegalitatea $x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0$)

$\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{b^2}{a^2}\right)^3 + \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{a^2}{b^2}\right)^3 \geq \frac{\left(1+\frac{a}{b}+\frac{b^2}{a^2}+1+\frac{b}{a}+\frac{a^2}{b^2}\right)^3}{4} \geq$ 3p

$\geq \frac{(2+2+2)^3}{4}$ =54 ....2p

(această metodă este prezentată în rezolvarea din GMB nr 10 / 2023)

3. Câte cvadruplete ordonate (a,b,c,d) de numere naturale satisfac simultan relațiile:
$a + b + c + d = 12$ și $|a^2 - b^2 + c^2 - d^2| = 2 \cdot |ac - bd|$?

Soluţie:

Ridicând la pătrat cei doi membrii pozitivi ai egalității $|a^2 - b^2 + c^2 - d^2| = 2 \cdot |ac - bd|$ se obține egalitatea echivalentă $(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 - 4(ac - bd)^2 = 0$ în care utilizând descompunerea diferenței de pătrate se ajunge la egalitatea echivalentă

$(a - b - c + d)(a + b - c - d)(a - b + c - d) = 0$

care are loc dacă unul din factori e nul. 2p

Cazul 1. $a - b - c + d = 0$ și $a + b + c + d = 12, a, b, c, d \in \boldsymbol{N}.$

Se obține $a + d = b + c = 6$ de unde avem 7 perechi de numere naturale (a, d) și respectiv (b, c) care fac parte din mulțimea $\{(0,6), (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), (6,0)\}$ 1p

Total 49 cvadruplete (a,b,c,d) de numere naturale ce satisfac condițiile cazului 1

Cazul 2. și cazul 3. se tratează analog, se obțin relațiile:

$a + b = c + d = 6$ și respectiv $a + c = b + d = 6$

și se obțin încă 49, și respectiv 49 de cvadruplete de numere naturale. 1p

Deocamdată avem $3 \cdot 49 = 147$ cvadruplete 1p

Dar unele dintre acestea se repetă:

Cvadrupletul (3,3,3,3) se repetă de trei ori , el apare la fiecare caz in parte, deci el trebuie luat o singură dată. Deci rămân 145 cvadruplete 1p

Cele 6 cvadrupletele $(0,6,0,6), (1,5,1,5), (2,4,2,4)$, $(4,2,4,2), (5,1,5,1), (6,0,6,0)$ se repetă în cazul 1 și 2 si tot câte 6 se repetă în cazurile 2 și 3 și în cazurile 1 și 3 deci mai scădem 18 cvadruplete din 145.

Oținem totalul de 127 cvadruplete. 1p

4. Fie O și H centrul cercului circumscris , respectiv ortocentrul triunghiului ABC. Notăm cu O_1, O_2 și O_3 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor HBC, HAC respectiv HAB. Arătați că pentru orice punct $M \in OH$, vectorul $\vec{v} = \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{MO_2} + \overrightarrow{MO_3}$ este coliniar cu vectorul $\overrightarrow{OH}$.

(GMB nr 4 / 2023)

Soluţie:

Scrie relația lui Sylvester pentru triunghiul ABC : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ 1p

Deduce că A este ortocentrul triunghiului BHC (se află la intersecția înălțimilor din H și din C) și scrie relația lui Sylvester în acest triunghi: $\overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1C} + \overrightarrow{O_1H} = \overrightarrow{O_1A}$ 1p

Scrie relațiile omoloage în triunghiul AHC și AHB.

$\vec{v}$ este coliniar cu $\overrightarrow{OH}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{v} = k \cdot \overrightarrow{OH}$, $k \in \boldsymbol{R}^*$...1p

Descompune pe $\overrightarrow{MO_1} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OO_1}$.

Scrie vectorial că $M \in OH$: $\overrightarrow{MO} = x \cdot \overrightarrow{OH}$ unde $x \in \boldsymbol{R}^*$

Obține că $\overrightarrow{MO_1} = x \cdot \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OO_1}$ unde pe $\overrightarrow{OO_1}$ îl deduce din relația lui Sylvester scrisă pentru triunghiul BHC:

$$\overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1C} + \overrightarrow{O_1H} = \overrightarrow{O_1A} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow$$

$2 \cdot \overrightarrow{O_1O} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OO_1} = -\frac{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH}}{2}$ 2p

Deci $\overrightarrow{MO_1} = x \cdot \overrightarrow{OH} - \frac{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH}}{2}$

Analog se obțin relații analoage pentru $\overrightarrow{MO_2}$, $\overrightarrow{MO_3}$.

Adunând membru cu membru ultimele trei relații se obține:

$\vec{v} = \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{MO_2} + \overrightarrow{MO_3} = 3x \cdot \overrightarrow{OH} + 2 \cdot \overrightarrow{OH} = (3x + 2) \cdot \overrightarrow{OH}$.

Deci $\vec{v}$ este coliniar cu $\overrightarrow{OH}$ 2p

Barem corectare
Clasa a X-a

1. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Să se arate că $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$
   Soluție

$|z_1| = |z_2| = |z_3| \Rightarrow \overline{z_i} = \dfrac{r^2}{z_i}, i = \overline{1,3}$ 2p

$0 = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = \dfrac{r^2}{z_1} + \dfrac{r^2}{z_2} + \dfrac{r^2}{z_3} = \dfrac{r^2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)}{z_1z_2z_3} \Rightarrow z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = 0$ 3p

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) = 0$ 2p

2. a) Să se arate că: $log_n(n+1) > log_{n+1}(n+2), \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2.$

b) Demonstrați că dacă $a, b, c \in (1,\infty)$, atunci $\dfrac{1}{2 + log_a b} + \dfrac{1}{2 + log_b c} + \dfrac{1}{2 + log_c a} \leq 1.$

Soluție

a) $log_n(n+1) > log_{n+1}(n+2) \Leftrightarrow lg^2(n+1) > lg(n) \cdot lg(n+2)$ 1p

Dacă $n \geq 2 \Rightarrow lg(n), lg(n+2) > 0.$ 1p

$\sqrt{lgn \cdot \lg(n+2)} < \dfrac{lgn + lg(n+2)}{2} = \dfrac{lgn(n+2)}{2} = lg\sqrt{n(n+2)} < lg\dfrac{n+n+2}{2} = lg(n+1)$ 1p

De unde obținem $lg^2(n+1) > lgn \cdot lg(n+2)$.

b) Notăm $log_a b = x, log_b c = y, log_c a = z$. Avem $x, y, z \in (0,\infty)$ și $xyz = 1$ 1p

După calcule relația $\dfrac{1}{2+x} + \dfrac{1}{2+y} + \dfrac{1}{2+z} \leq 1$ devine echivalentă cu $xy + xz + yz \geq 3$ 1p

Utilizând inegalitatea mediilor avem: $xy + xz + yz \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3$ 2p

3. a) Demonstrați că $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c), \forall a,b,c \in \mathbb{R}$.
b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{5-2x}+\sqrt[3]{x^2+x+2}+\sqrt[3]{-x^2+x-1}=\sqrt[3]{6}$.
Soluție

a) Calcul 2p
b) Ridicăm la puterea a treia și obținem, utilizând formula de la punctul a)

$$3\left(\sqrt[3]{5-2x}+\sqrt[3]{x^2+x+2}\right)\left(\sqrt[3]{5-2x}+\sqrt[3]{-x^2+x-1}\right)\left(\sqrt[3]{-x^2+x-1}+\sqrt[3]{x^2+x+2}\right)=0$$ 2p

Obținem: $x^2-x+7=0$ ce nu are soluții reale. 1p

$x^2+x-4=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. 1p

2x+1=0 $\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ 1p

4. Fie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(n)=\left[\dfrac{n}{2}\right]+\left[\dfrac{n+1}{5}\right]$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.
a) Să se arate că f nu este surjectivă.
b) Determinați numerele $m\in\mathbb{N}$ pentru care ecuația $f(x)=m$ are soluție unică.
Gazeta Matematica 10/2023
Soluție

a) f(0)=0, f(1)=0, f(2)=1, f(3)=1, f(4)=3. 1p
Dacă $n\geq 4 \Rightarrow f(n)\geq 3$, deci ecuația f(n)=2 nu are soluție, de unde obținem că f nu este surjectivă. 2p

b)

$$f(n)=\begin{cases} 7k & ,n=10k, n=10k+1 \\ 7k+1 & ,n=10k+2, n=10k+3 \\ 7k+3 & ,n=10k+4, n=10k+5 \\ 7k+4 & ,n=10k+6, n=10k+7 \\ 7k+5 & ,n=10k+8 \\ 7k+6 & ,n=10k+9 \end{cases}$$ 2p

Ecuația are soluție unică, dacă $m\in\{7k+5, 7k+6\}, k\in\mathbb{Z}$. 2p

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
16.02.2024

Clasa a XI-a MI

Subiectul I:

a) Calculați determinantul: $\Delta(x,y)=\begin{vmatrix} y & x & y-x \\ y-x & y & x \\ x & y-x & y \end{vmatrix}$, cu $x,y\in\mathbb{R}$, scriind rezultatul sub formă de produs;

b) Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $B=aA^3+xA^2+(a-x)A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Demonstrați că $a\cdot\det(B)\geq 0,\ \ \forall a,x\in\mathbb{R}$.

Barem de notare:

a) Folosește proprietățile determinanților și ajunge, prin însumare de linii/coloane , la
$\Delta(x,y)=2y\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y-x & y & x \\ x & y-x & y \end{vmatrix}$ 1p
Finalizare $\Delta(x,y)=2y(3x^3-3xy+y^2),\ x,y\in\mathbb{R}$..2p

b) Calculează $A^3=I_3$..1p
Determină $B=\begin{pmatrix} a & x & a-x \\ a-x & a & x \\ x & a-x & a \end{pmatrix}$ și folosește subpunctul a) pentru
detB=$2a(3x^3-3xa+a^2)$..1p
Prelucrează $a\cdot detB$=$2a^2\left[3\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}\right]\geq 0,\forall a,x\in\mathbb{R}$...................................2p

Rezolvare completă:

1. a) $\Delta(x,y)=\begin{vmatrix} y & x & y-x \\ y-x & y & x \\ x & y-x & y \end{vmatrix}\underset{=}{(L_1+L_2+L_3\to L_1)}\begin{vmatrix} 2y & 2y & 2y \\ y-x & y & x \\ x & y-x & y \end{vmatrix}=$
$=2y\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y-x & y & x \\ x & y-x & y \end{vmatrix}\underset{=}{\begin{pmatrix} c_2-c_1\to c_2 \\ c_3-c_1\to c_3 \end{pmatrix}}2y\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y-x & y & 2x-y \\ x & y-2x & y-x \end{vmatrix}=$
$=2y\begin{vmatrix} x & 2x-y \\ y-2x & y-x \end{vmatrix}$=$2y(xy-x^2-2xy+y^2+4x^2-2xy)$=$2y(3x^2-3xy+y^2)$.

b)$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

$$B = aA^3 + xA^2 + (a-x)A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & a-x \\ a-x & 0 & 0 \\ 0 & a-x & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a & x & a-x \\ a-x & a & x \\ x & a-x & a \end{pmatrix}.$$

$$Det\ B = \begin{vmatrix} a & x & a-x \\ a-x & a & x \\ x & a-x & a \end{vmatrix} \overset{a)}{=} 2a^2(3x^2 - 3xa + a^2) = 2a^2\left[3 \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{3a^2}{4} + a^2\right] =$$
$$2a^2\left[3\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}\right] \geq 0, \forall a, x \in \mathbb{R}.$$

Subiectul al II-lea:

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Demonstrați că $det(A - x \cdot I_2) = x^2 - (a+d)x + ad - bc, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$;

b) Dacă $Tr(A) = 2$ și $\det(A) = 3$, demonstrați că: $2 \cdot det(A^2 + I_2) - det(A^2 + 3I_2) = 4$.

Barem de notare:

a) Prin calcul direct: $A - x \cdot I_2 = \begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix}$...1p

Finalizare $det(A - x \cdot I_2) = x^2 - (a+d)x + ad - bc, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.......................2p

b) Din Teorema Cayley-Hamilton: $A^2 - TrA \cdot A + det\,A \cdot I_2 = O_2$, deduce $A^2 + I_2 = 2(A - I_2)$, iar prin trecere la determinant obține $det(A^2 + I_2) = 8$............2p

Analog deduce $A^2 + 3I_2 = 2A$, de unde $det(A^2 + 3I_2) = 12$.

Înlocuiește in egalitatea din enunț și obține: $2 \cdot 8 - 12 = 4$, ceea ce trebuia demonstrat...........2p

Rezolvare completă:

a) $A - x \cdot I_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix}$.

$det(A - x \cdot I_2) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-x)(d-x) - bc = ad - ax - dx + x^2 - bc =$
$= x^2 - (a+d)x + ad - bc, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Din Relația Cayley-Hamilton avem:

$$A^2 - Tr\,A \cdot A + det\,A \cdot I_2 = O_2 \Rightarrow A^2 - 2A + 3 \cdot I_2 = O_2 \Rightarrow A^2 = 2A - 3i_2 \Rightarrow$$

$A^2 + I_2 = 2A - 2I_2 \Rightarrow A^2 + I_2 = 2(A - I_2)$ (*).

Trec la determinant in (*) și se obține:

$det(A^2+I_2) = 2^2 \cdot det(A-I_2) \overset{a)}{=} 2^2(1-2\cdot 1+3) = 8.$

Analog, $A^2 = 2A - 3I_2 \Rightarrow A^2 + 3I_2 = 2A \Rightarrow det(A^2+3I_2) = 2^2 \cdot det\,A = 4\cdot 3 = 12.$

Înlocuiesc în egalitatea din enunț și obțin: $2\cdot 8 - 12 = 4$, ceea ce trebuia demonstrat.

Subiectul al III-lea:

a) Fie $a \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}\right\},$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+2n+2}\right).$

Barem de notare:

a) Obține $\left[\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}\right] = an.$ 1p
Folosește $\{x\} = x - [x]$ 1p
Amplifică cu conjugata expresiei $\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1} - an$ 1p
Finalizează limita și obține $\frac{2a-1}{2a}$ 1p

b) Scrie limita ca $\lim\limits_{n\to\infty} sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+2n+2} - \pi n\right)$ 1p
Amplifică cu conjugate expresiei $\pi\sqrt{n^2+2n+2} - \pi n$. 1p
Obține limita 0 ....1p

Rezolvare completă:

a) $\{x\} = x - [x], \forall x \in \boldsymbol{R}.$

Calculăm $\left[\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}\right]$:

$$\left[\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}\right] = \left[\sqrt{a^2n^2+2an+1-n}\right] = \left[\sqrt{(an+1)^2-n}\right].$$

Cum $an < \sqrt{(an+1)^2-n} < an+1 \Rightarrow \left[\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}\right] = an.$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1} - an\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a^2n^2+(2a-1)n+1-a^2n^2}{\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}+an} = \frac{2a-1}{2a}.$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+2n+2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+2n+2} - \pi n\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} sin^2\left(\pi \cdot \frac{n^2+2n+2-n^2}{\sqrt{n^2+2n+2}+n}\right) = \lim_{n\to\infty} sin^2 \frac{2n\pi\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}\right)} = 0.$$

Subiectul al IV-lea:

a) Să se arate că $\forall \varepsilon > 0, \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca $\frac{(1-\varepsilon)\pi}{n} < \sin\frac{\pi}{n} < \frac{(1+\varepsilon)\pi}{n}, \forall\, n \geq N_\varepsilon$.

b) Folosind eventual rezultatul precedent, să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\frac{\pi}{k} = \pi \ln 2$.

Barem de notare:

a) Aplică criteriul de convergență cu ε pentru $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1$ 1p

Obține inegalitatea din enunț 2p

b) Însumează inegalitățile de la a) ……………………………………………… 1p

Trece la limită și obține $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} sin\frac{\pi}{k} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\pi}{k}$ 1p

Calculează $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\pi}{k}$ și obține $\pi\, ln\, 2$ 2p

Rezolvare completă:

a) Se cunoaște că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1$.

Din criteriul de convergență cu ε, rezultă: $\forall\epsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca $\left|\frac{sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} - 1\right| < \varepsilon, \forall n > N_\varepsilon$.

Adică $\left|sin\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right| < \varepsilon \cdot \frac{\pi}{n} \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon\pi}{n} < sin\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} < \frac{\varepsilon\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{(1-\epsilon)\pi}{n} < sin\frac{\pi}{n} < \frac{(1+\epsilon)\pi}{n}$.

b) Notăm $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + + \frac{1}{n} - ln\, n$.

Prin însumarea relației de la punctul a) de la $n+1$ la 2n se obține:

$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(1-\varepsilon)\pi}{k} < \sum_{k=n+1}^{2n} sin\frac{\pi}{k} < \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(1+\varepsilon)\pi}{k}$.

Trecând la limită și ținând cont că ε a fost ales arbitrar, se obține:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n} sin\frac{\pi}{k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\pi}{k} = \lim_{n\to\infty}\pi\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} =$$

$$= \pi\lim_{n\to\infty}(c_{2n} + ln\, 2n - c_n - ln\, n) = \lim_{n\to\infty}(c_{2n} - c_n + ln\frac{2n}{n}) = \pi\, ln\, 2.$$

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
16.02.2024

clasa a XII-a
Barem de corectare și notare

1. Pe mulțimea $G = (0,1)$ definim operația binară $x * y = \frac{xy}{2xy-x-y+1}$.
   a) Arătați că $(G,*)$ este grup abelian.
   b) Demonstrați că funcția $f: G \to (0,+\infty)$, definită prin $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ pentru orice x din G, este un izomorfism de grupuri de la grupul $(G,*)$ la grupul $\left((0,+\infty),\cdot\right)$, unde „ $\cdot$ ” este înmulțirea numerelor reale.

Soluție:

a) $x * y = \frac{xy}{2xy-x-y+1} = \frac{xy}{xy+(x-1)(y-1)}$. Pentru $x, y \in (0,1)$ avem că $(x-1)(y-1) > 0$ de unde $xy + (x-1)(y-1) > xy$ și cum $xy > 0$ obținem că $x * y \in (0,1)$ ...1p
$(x*y)*z = x*(y*z) = \frac{xyz}{xyz-(x-1)(y-1)(z-1)}, \forall x,y,z \in G$, deci „ $*$ ” este asociativă; iar comutativitatea legii e evidentă ...1p
Căutăm $e \in G$ astfel încât $x * e = e * x = x,\ \forall x \in G$.
$x * e = x \Leftrightarrow (x-1)(2e-1) = 0, \forall x \in G \Leftrightarrow e = \frac{1}{2}$. Cum „ $*$ ” e comutativă, avem că $\frac{1}{2}$ este elementul netru al legii. ...1p
Fie $x \in G$. Căutăm $x' \in G$ astfel încât $x * x' = x' * x = e$.
$x * x' = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x' = 1 - x \in G,\ \forall x \in G \Rightarrow U(G) = G$ și deci $(G,*)$ este grup abelian. ...1p

b) f morfism $\Leftrightarrow f(x*y) = f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y \in G$
$f(x*y) = \frac{1}{x*y} - 1 = \frac{xy+(x-1)(y-1)}{xy} - 1 = \frac{(x-1)(y-1)}{xy} = \frac{x-1}{x}\cdot\frac{y-1}{y} = f(x)\cdot f(y)$, deci f e morfism. ...1p
Fie $x_1, x_2 \in G$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, deci f e injectivă ...1p
Fie $y \in (0,+\infty)$. Căutăm $x \in G$ astfel încât $f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{1+y} \in G$, deci f e surjectivă și prin urmare f este un izomorfism de grupuri ...1p

2. Calculați $\int x^2(\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x)dx,\ x \in (0,1)$.

G.M.

Soluție:

$\int x^2(\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x)dx = \frac{1}{2}\int x^2(\operatorname{tg}^2 x)'\,dx = \frac{x^2\operatorname{tg}^2 x}{2} - \int x\operatorname{tg}^2 x\,dx =$ ...2p

$= \frac{x^2\operatorname{tg}^2 x}{2} - \int x(\operatorname{tg}^2 x + 1)dx + \int x\,dx =$ ...2p

$= \frac{x^2(1+\operatorname{tg}^2 x)}{2} - \int x(\operatorname{tg} x)'\,dx = \frac{x^2(1+\operatorname{tg}^2 x)}{2} - x\operatorname{tg} x + \int \operatorname{tg} x\,dx =$ ...2p

$= \frac{x^2(1+\operatorname{tg}^2 x)}{2} - x\operatorname{tg} x - \ln(\cos x) + C$ ...1p

3. Fie $(G,\cdot)$ un grup și $f: G \to G$, $f(x) = x^3$, un morfism de grupuri de la $(G,\cdot)$ la $(G,\cdot)$.
   a) Demonstrați că $(xy)^4 = x^4y^4$ pentru orice $x, y \in G$.
   b) Dacă f este o funcție injectivă, demonstrați că $(G,\cdot)$ este abelian.

Soluție:

a) f morfism $\Leftrightarrow \mathrm{f(xy)} = f(x)f(y), \forall x, y \in G$, de unde obținem $(xy)^3 = x^3y^3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathrm{x(yx)^2y = x^3y^3}$ și prin simplificare la stânga cu x și la dreapta cu y, obținem
$(yx)^2 = x^2y^2, , \forall x, y \in G$ și deci și $(xy)^2 = y^2x^2, \forall x, y \in G$ ...2p
Deci $(x^2)^2(y^2)^2 = (y^2x^2)^2 \Leftrightarrow \mathrm{x^4y^4 = ((xy)^2)^2} \Leftrightarrow x^4y^4 = (xy)^4, \forall x, y \in G$ ...2p

b) Din subpunctul anterior avem că $x^4y^4 = (xy)^4 \Leftrightarrow x^4y^4 = x(yx)^3y$ și prin simplificare la stânga cu x și la dreapta cu y, obținem $x^3y^3 = (yx)^3, \forall x, y \in G$ ...1p
Dar $x^3y^3 = (xy)^3, \forall x, y \in G$ și prin urmare $(xy)^3 = (yx)^3 \Leftrightarrow \mathrm{f(xy) = f(yx)}$ și cum f este injectivă, obținem $\mathrm{xy = yx}$, $\forall x, y \in G$, deci $(G,\cdot)$ este abelian ...2p

4. Fie funcția $f: [0, \pi] \to \boldsymbol{R}$, definită prin $f(x) = \frac{1}{1+3\cos^2 x}$ pentru orice x din $[0, \pi]$. Demonstrați că f admite primitive și determinați o primitivă a ei.

Soluție:

f e continuă, deci admite primitive pe $[0, \pi]$ ...1p

Pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \int f(x)dx = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}+3} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x+4} \cdot (\mathrm{tg}\, x)' \ dx = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg\, x}}{2} + \mathcal{C}$ ...2p

Analog, pentru $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right], \int f(x)dx = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg\, x}}{2} + \mathcal{C}$ ...1p

Fie $F: [0, \pi] \to \boldsymbol{R}$ o primitivă a funcției f.

Rezultă că există $k, C_1, C_2 \in \boldsymbol{R}$ astfel încât $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg\, x}}{2} + C_1, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ k, & x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg\, x}}{2} + C_2, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$ ...1p

Cum $F\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4} + C_1$ și $F\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\frac{\pi}{4} + C_2$, din continuitatea funcției F în $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$, rezultă că $C_1 = k - \frac{\pi}{4}$ și $C_2 = k + \frac{\pi}{4}$. ...1p

Prin urmare $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg\, x}}{2} + k - \frac{\pi}{4}, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ k, & x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg\, x}}{2} + k + \frac{\pi}{4}, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$. Cum F derivabilă pe $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, F continuă în $\frac{\pi}{2}$ obținem că $F_s'\left(\frac{\pi}{2}\right) = F_d'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Deci $F' = f \Rightarrow F$ e o primitivă a lui f ...1p